

*Применение целочисленного программирования
в задаче слияния потоков воздушных судов*

С.С. Кумков, А.А. Спиридонов

5 апреля 2021 г.

Постановка задачи

Рассматриваются три типа судов: «лёгкий» (L, light), «средний» (M, medium), «тяжёлый» (H, heavy).

σ_i — тип i -го судна, где соответствующий объект σ выбирается из множества $\{L, M, H\}$.

$\tau_{\sigma_i, \sigma_j}^{\text{safe}}$ — минимальный промежуток безопасности между i -м судном типа σ_i и следующим за ним j -м судном типа σ_j .

Тип предыдущего судна, σ_i		Тип последующего судна, σ_j		
		лёгкий	средний	тяжёлый
лёгкий		60	60	60
средний		180	60	60
тяжёлый		180	120	120

Постановка задачи

- $\{(t_i^{\text{nom}}, \sigma_i, t_i^{\text{acc}}, t_i^{\text{dec}})\}_{i=1}^N$ — набор данных по ВС: номинальный момент прибытия в точку слияния, тип ВС, величины максимального ускорения и замедления ВС к точке слияния, относительно номинального момента; набор упорядочен по возрастанию моментов прибытия;
- $t_i^{\text{nom}} \rightarrow [t_i^{\text{nom}} - t_i^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t_i^{\text{dec}}]$ — интервал варьирования изменённого момента прибытия каждого воздушного судна (ВС).
В моделировании использовались единые для каждого ВС величины варьирования t^{acc} , t^{dec} ;
- $\tau_{\sigma_i, \sigma_j}^{\text{safe}}$ — минимальный безопасный временной интервал между двумя ВС в упорядочиваемой очереди.

Функция штрафа f_i за отклонение назначенного момента t_i прибытия i -го ВС от его номинального момента t_i^{nom} выбиралась двумя способами:

- «симметричная» функция

$$f_i^s(t_i, t_i^{\text{nom}}, \sigma_i) = \beta_{\sigma_i} \cdot |t_i - t_i^{\text{nom}}|,$$

где β_{σ_i} — весовой коэффициент стоимости варьирования момента прибытия судна того или иного типа. Коэффициенты функции задавались следующим образом: $\beta_L = 1.0$, $\beta_M = 3.0$, $\beta_H = 5.0$.

- «несимметричная» функция

$$f_i^{\text{as}}(t_i, t_i^{\text{nom}}, \sigma_i) = \beta_{\sigma_i} \cdot \begin{cases} -K^- \cdot (t_i - t_i^{\text{nom}}), & \text{если } t_i < t_i^{\text{nom}}, \\ K^+ \cdot (t_i - t_i^{\text{nom}}), & \text{если } t_i \geq t_i^{\text{nom}}. \end{cases}$$

Коэффициенты функции задавались следующим образом: $\beta_L = 1.0$, $\beta_M = 3.0$, $\beta_H = 5.0$, $K^- = 2$, $K^+ = 1$.

Таким образом, возникает оптимизационная задача

$$F(\{t_i\}, \{(t_i^{\text{nom}}, \sigma_i)\}) = \sum_{i=1}^N f_i(t_i, t_i^{\text{nom}}, \sigma_i) \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$t_i \in [t_i^{\text{nom}} - t_i^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t_i^{\text{dec}}], \quad t_i \geq 0, \\ \forall 1 \leq i, j \leq N : t_i < t_j \Rightarrow t_j - t_i \geq \tau_{\sigma_i, \sigma_j}^{\text{safe}}$$

Ранее показывалось, что при фиксированном порядке судов данная задача сводится к задаче линейного программирования (ЛП) и эффективно решается соответствующим ЛП-решателем, основанном на симплекс-методе.

Сведение к задаче МIP

С помощью замены

$$q_i := |t - t_i^{\text{nom}}|,$$

$$q_i \geq 0, \quad -q_i \leq t - t_i^{\text{nom}} \leq q_i.$$

функции f^s и f^{as} сводятся к виду

$$f^s(t_i, t_i^{\text{nom}}, \sigma_i) = \beta_i \cdot |t_i - t_i^{\text{nom}}| = \beta_i \cdot q_i,$$

$$\begin{aligned} f^{\text{as}}(t_i, t_i^{\text{nom}}, \sigma_i) &= \beta_{\sigma_i} \cdot \begin{cases} -K^- \cdot (t_i - t_i^{\text{nom}}), & \text{если } t_i < t_i^{\text{nom}}, \\ K^+ \cdot (t_i - t_i^{\text{nom}}), & \text{если } t_i \geq t_i^{\text{nom}}, \end{cases} \\ &= \beta_{\sigma_i} \cdot (a \cdot q_i + b \cdot (t_i - t_i^{\text{nom}})) \\ &= a \cdot \beta_{\sigma_i} \cdot q_i + b \cdot \beta_{\sigma_i} \cdot t_i - b \cdot \beta_{\sigma_i} \cdot t_i^{\text{nom}}, \end{aligned}$$

где $a = (K^+ + K^-)/2$, $b = (K^+ - K^-)/2$.

Учёт порядка судов и интервалов безопасности

Вводятся *целые* переменные $\delta_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq N$, принимающие значения 0 и 1 (*двоичные* или *бинарные* переменные).

Предполагается, что если $t_i < t_j$ (i -е ВС пребывает раньше j -го), то $\delta_{i,j} = 1$, иначе $\delta_{i,j} = 0$.

Из определения имеем, что $\delta_{i,j}$ и $\delta_{j,i}$ связаны соотношением $\delta_{i,j} + \delta_{j,i} = 1$.

Учёт порядка судов и интервалов безопасности

Обозначим $A_i = t_i^{\text{nom}} - t^{\text{acc}}$, $D_i = t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}}$. Рассмотрим неравенство

$$t_j \geq t_i + \tau_{\sigma_i, \sigma_j}^{\text{safe}} \cdot \delta_{i,j} + (A_j - D_i) \cdot \delta_{j,i}.$$

Если $t_i < t_j$ (i -е ВС пребывает раньше j -го), то $\delta_{i,j} = 1$, $\delta_{j,i} = 0$, и неравенство преобразуется в

$$t_j \geq t_i + \tau_{\sigma_i, \sigma_j}^{\text{safe}}.$$

И, наоборот, если $t_i > t_j$, то $\delta_{i,j} = 0$, $\delta_{j,i} = 1$, и неравенство преобразуется в

$$t_j \geq t_i + A_j - D_i,$$

или, что эквивалентно,

$$t_j - A_j = t^{\text{acc}} \geq 0 \geq t_i - D_i = -t^{\text{dec}}.$$

Учёт порядка судов и интервалов безопасности

Таким образом, в рамках такого подхода задачи выбора оптимального порядка и назначения оптимальных моментов прибытия решаются вместе одновременно. Однако, из-за дискретной природы переменных $\delta_{i,j}$, необходимы более сложные алгоритмы смешанного целочисленного программирования (MIP).

$$\alpha \cdot x = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \rightarrow \min / \max$$

при условии

$$x \in \mathbb{R}^N,$$

$$Ax \leq b.$$

MIP. Постановка задачи MIP

$$\alpha \cdot x = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \rightarrow \min / \max$$

при условии

$$x = (y, k) \in \mathbb{R}^{N_y} \times \mathbb{Z}^{N_k}, \quad N_y + N_k = N,$$

$$Ax \leq b.$$

MIP. Метод секущих плоскостей

- 1 берем исходную задачу как начальную задачу MIP_0 ;

MIP. Метод секущих плоскостей

- 1 берем исходную задачу как начальную задачу MIP_0 ;
- 2 решаем текущую задачу MIP_l как *ослабленную задачу линейного программирования (ОЗЛП)*, разрешив целочисленным переменным k_i принимать нецелые значения; получаем её оптимальное решение $\bar{x}^{(l)} = (\bar{y}^{(l)}, \bar{k}^{(l)})$;

MIP. Метод секущих плоскостей

- 1 берем исходную задачу как начальную задачу MIP_0 ;
- 2 решаем текущую задачу MIP_l как *ослабленную задачу линейного программирования* (ОЗЛП), разрешив целочисленным переменным k_i принимать нецелые значения; получаем её оптимальное решение $\bar{x}^{(l)} = (\bar{y}^{(l)}, \bar{k}^{(l)})$;
- 3 если все значения $\bar{k}_i^{(l)}$ целых переменных k_i действительно целые, то задача решена;

MIP. Метод секущих плоскостей

- 1 берем исходную задачу как начальную задачу MIP_0 ;
- 2 решаем текущую задачу MIP_l как *ослабленную задачу линейного программирования* (ОЗЛП), разрешив целочисленным переменным k_i принимать нецелые значения; получаем её оптимальное решение $\bar{x}^{(l)} = (\bar{y}^{(l)}, \bar{k}^{(l)})$;
- 3 если все значения $\bar{k}_i^{(l)}$ целых переменных k_i действительно целые, то задача решена;
- 4 иначе вводим в набор новое ограничение, которому не удовлетворяет $\bar{x}^{(l)}$, но удовлетворяет любое решение с целыми компонентами k_i ; получаем новую задачу MIP_{l+1} ; переходим к шагу 2.

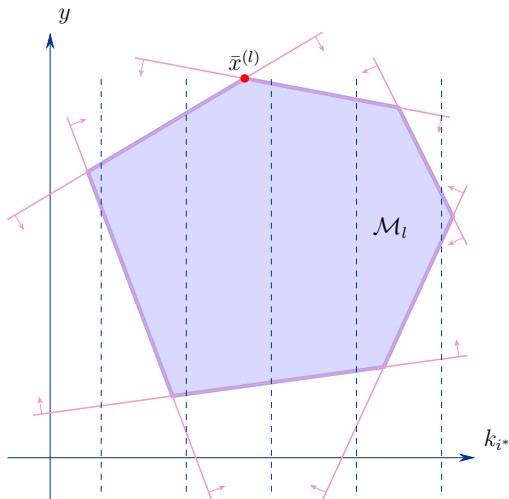
MIP. Метод секущих плоскостей

- 1 берем исходную задачу как начальную задачу MIP_0 ;
- 2 решаем текущую задачу MIP_l как *ослабленную задачу линейного программирования* (ОЗЛП), разрешив целочисленным переменным k_i принимать нецелые значения; получаем её оптимальное решение $\bar{x}^{(l)} = (\bar{y}^{(l)}, \bar{k}^{(l)})$;
- 3 если все значения $\bar{k}_i^{(l)}$ целых переменных k_i действительно целые, то задача решена;
- 4 иначе вводим в набор новое ограничение, которому не удовлетворяет $\bar{x}^{(l)}$, но удовлетворяет любое решение с целыми компонентами k_i ; получаем новую задачу MIP_{l+1} ; переходим к шагу 2.

На шаге 4 алгоритма, можем получать не одну задачу, а несколько, по-разному вводя новое ограничение.

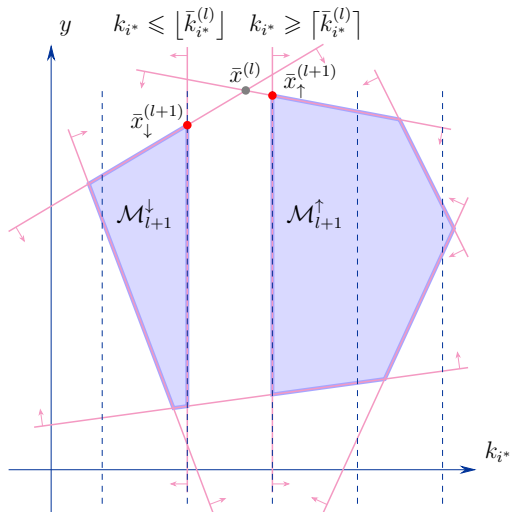
MIP. Метод ветвей и сечений

$y \rightarrow \max$



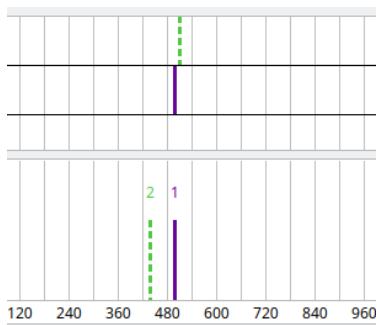
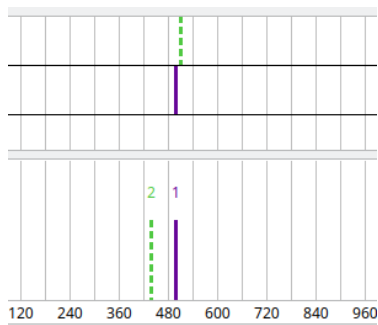
MIP. Метод ветвей и сечений

$y \rightarrow \max$



Численные результаты. Пример 1

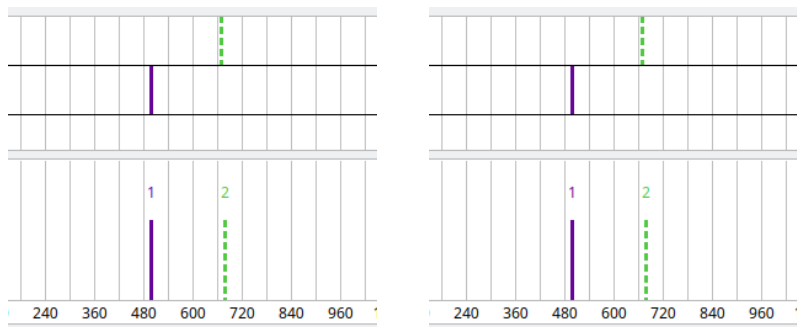
$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 510, \sigma_2 = \text{L})$.



В случае симметричной (слева) и несимметричной (справа) функций штрафа решения одинаковые: $t_1 = 500$, $t_2 = 440$.

Численные результаты. Пример 2

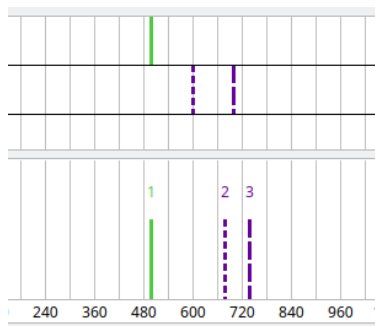
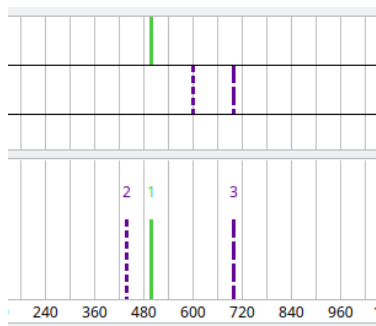
$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = H), (t_2^{\text{nom}} = 670, \sigma_2 = L).$



В случае симметричной (слева) и несимметричной (справа) функций штрафа решения одинаковые: $t_1 = 500$, $t_2 = 680$.

Численные результаты. Пример 3

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 600, \sigma_2 = \text{L}), (t_3^{\text{nom}} = 700, \sigma_3 = \text{M}).$

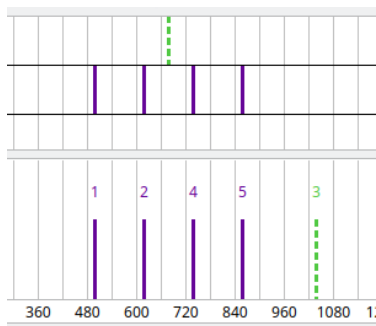
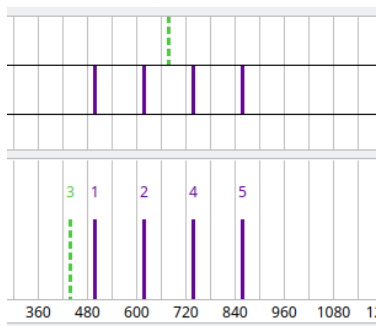


$f^s(\text{слева}): t_1 = 500, t_2 = 440, t_3 = 700.$

$f^{\text{as}}(\text{справа}): t_1 = 500, t_2 = 680, t_3 = 740.$

Численные результаты. Пример 4

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 620, \sigma_2 = \text{H}), (t_3^{\text{nom}} = 680, \sigma_3 = \text{L}),$
 $(t_4^{\text{nom}} = 740, \sigma_4 = \text{H}), (t_5^{\text{nom}} = 860, \sigma_5 = \text{H}).$



f^s (слева): $t_1 = t_1^{\text{nom}}, t_2 = t_2^{\text{nom}}, t_3 = 440, t_4 = t_4^{\text{nom}}, t_5 = t_5^{\text{nom}}.$

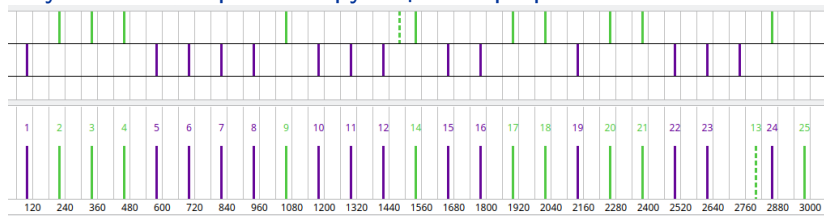
f^{as} (справа): $t_1 = t_1^{\text{nom}}, t_2 = t_2^{\text{nom}}, t_3 = 1040, t_4 = t_4^{\text{nom}}, t_5 = t_5^{\text{nom}}.$

Численные результаты. Пример 5а

24 тяжёлых судна идут в точности с интервалом безопасности $\tau_{H,H}^{\text{safe}} = 120$ с. Посередине «зажато» лёгкое судно с временными интервалами спереди и позади по 60 с.

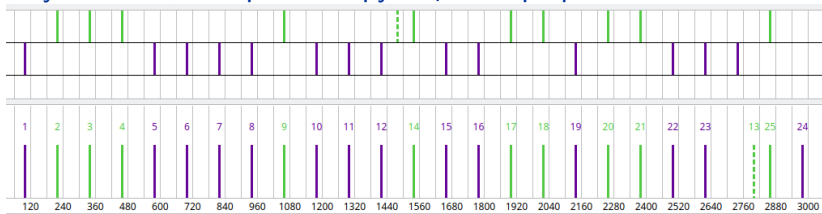
Оптимальное решение: лёгкое ВС сдвинуть максимально в конец очереди, варьировать остальные тяжёлые суда, разрешив наведённый конфликт с лёгким судном.

Случай симметричной функции штрафа:



Численные результаты. Пример 56

Случай несимметричной функции штрафа:



У тяжёлых судов с индексами 24 и 25 произошла смена порядка.

Наборы из 30 судов, слияние 2-х потоков, 1000 пусков:

- симметричная функция штрафа, равномерное распределение типов — $T_{avg} = 3.68$ с, $T_{max} = 26.4$ с;
- несимметричная функция штрафа, равномерное распределение типов — $T_{avg} = 1.82$ с, $T_{max} = 24.29$ с;
- симметричная функция штрафа, неравномерное распределение типов — $T_{avg} = 0.36$ с, $T_{max} = 5.55$ с;
- несимметричная функция штрафа, неравномерное распределение типов — $T_{avg} = 0.24$ с, $T_{max} = 1.63$ с;

Наборы из 50 судов, слияние 2-х потоков, 1000 пусков:

- симметричная функция штрафа, равномерное распределение типов — $T_{avg} = 13.45$ с,
 $T_{max} = 934.4$ с ≈ 16 мин;
- несимметричная функция штрафа, равномерное распределение типов — $T_{avg} = 16.4$ с,
 $T_{max} = 634.7$ с ≈ 11 мин;
- симметричная функция штрафа, неравномерное распределение типов — $T_{avg} = 1.16$ с, $T_{max} = 6.94$ с;
- несимметричная функция штрафа, неравномерное распределение типов — $T_{avg} = 0.55$ с, $T_{max} = 4.47$ с;

Наборы из 30 судов, слияние 3-х потоков, 1000 пусков:

- симметричная функция штрафа, неравномерное распределение типов — $T_{avg} = 10.39$ с,
 $T_{max} = 1219.83$ с ≈ 20 мин;
- несимметричная функция штрафа, неравномерное распределение типов — $T_{avg} = 14.15$ с,
 $T_{max} = 4367.72$ с ≈ 73 мин;

В случае с равномерным распределением ситуация ещё хуже. Время обработки некоторых примеров достигало нескольких часов. Счёт был остановлен принудительно.

Учёт минимальной величины вариации

Введём две дополнительные дискретные величины, определяющие режимы вариации момента прибытия ВС

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{ВС замедляется,} \\ 0, & \text{ВС не замедляется.} \end{cases} \quad \zeta_i = \begin{cases} 1, & \text{ВС ускоряется,} \\ 0, & \text{ВС не ускоряется.} \end{cases}$$

Диапазон вариации момента прибытия t_i ВС определяется следующим двойным неравенством

$$l(\eta_i, \zeta_i) \leq t_i - t_i^{\text{nom}} \leq u(\eta_i, \zeta_i).$$

Учёт минимальной величины вариации

Диапазоны величин вариации ускорения/замедления
($l(\eta_i, \zeta_i), u(\eta_i, \zeta_i)$):

$\zeta_i \backslash \eta_i$	0	1
0	(0, 0)	(μ_i, t_i^{dec})
1	($-t_i^{\text{acc}}, -\mu_i$)	

Здесь $t_i^{\text{acc}}, t_i^{\text{dec}}$ — максимальные величины ускорения и замедления ВС, соответственно. μ_i — минимальная величина вариации момента прибытия ВС. Можно рассматривать разные минимальные вариации для ускорения и задержки.

Для исключения пары значений $\eta_i = 1, \zeta_i = 1$ вводится ограничение $\eta_i + \zeta_i \leq 1$.

Учёт минимальной величины вариации

Пусть ограничения на величину вариации $l(\eta_i, \zeta_i)$, $u(\eta_i, \zeta_i)$ описывается линейной зависимостью от η_i , ζ_i

$$l(\eta_i, \zeta_i) = \alpha \zeta_i + \beta \eta_i + \gamma.$$

$$\begin{cases} (\zeta_i = 0, \eta_i = 0) \rightarrow \gamma = 0, \\ (\zeta_i = 1, \eta_i = 0) \rightarrow \alpha + \gamma = -t_i^{\text{acc}}, \\ (\zeta_i = 0, \eta_i = 1) \rightarrow \beta + \gamma = \mu_i, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 0, \\ \alpha = -t_i^{\text{acc}}, \\ \beta = \mu_i. \end{cases}$$

Аналогично для $u(\eta, \zeta_i)$. Отсюда следует

$$\begin{cases} l(\eta_i, \zeta_i) = -t_i^{\text{acc}} \cdot \zeta_i + \mu_i \cdot \eta_i, \\ u(\eta_i, \zeta_i) = -\mu_i \cdot \zeta_i + t_i^{\text{dec}} \cdot \eta_i. \end{cases}$$

Учёт минимальной величины вариации

Тогда ограничение на величину вариации будет иметь вид

$$-t_i^{\text{acc}} \cdot \zeta_i + \mu_i \cdot \eta_i \leq t_i - t_i^{\text{nom}} \leq -\mu_i \cdot \zeta_i + t_i^{\text{dec}} \cdot \eta_i.$$

Приводя к виду, когда неизвестные находятся в левой части неравенства, а константы — в правой, получаем ограничения

$$\begin{cases} t_i + t_i^{\text{acc}} \cdot \zeta_i - \mu_i \cdot \eta_i \geq t_i^{\text{nom}}, \\ t_i + \mu_i \cdot \zeta_i - t_i^{\text{dec}} \cdot \eta_i \leq t_i^{\text{nom}}. \end{cases}$$

Эти неравенства вместе с ограничениями на ζ_i и η_i заменяют условие $t_i \in [t_i^{\text{nom}} - t_i^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t_i^{\text{dec}}]$ в ограничениях исходной задачи MIP.

Численные результаты. Пример 1

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 510, \sigma_2 = \text{L}).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 70$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 70 с;

Численные результаты. Пример 1

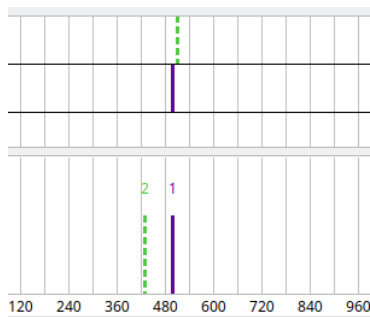
$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = H), (t_2^{\text{nom}} = 510, \sigma_2 = L).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 70$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 70 с;
- $70 < \mu < 170$: ускорение лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;

Численные результаты. Пример 1

Например, при $\mu = 80$ с получено следующее оптимальное решение $t_1 = 500$, $t_2 = 430$.



Численные результаты. Пример 1

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = H), (t_2^{\text{nom}} = 510, \sigma_2 = L).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 70$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 70 с;
- $70 < \mu < 170$: ускорение лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;
- $170 \leq \mu \leq t^{\text{acc}} = 480$ с: два варианта оптимального решения — ускорение или задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;

Численные результаты. Пример 1

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = H), (t_2^{\text{nom}} = 510, \sigma_2 = L).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 70$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 70 с;
- $70 < \mu < 170$: ускорение лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;
- $170 \leq \mu \leq t^{\text{acc}} = 480$ с: два варианта оптимального решения — ускорение или задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;
- $t^{\text{acc}} < \mu \leq t^{\text{dec}} = 1320$ с: только задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ .

Численные результаты. Пример 1

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 510, \sigma_2 = \text{L}).$

Случай несимметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 70$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 70 с;

Численные результаты. Пример 1

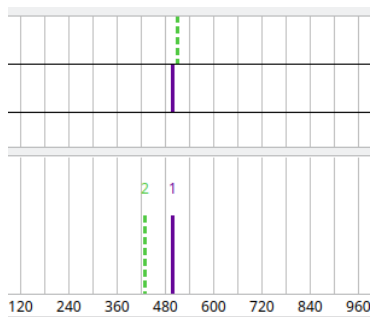
$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = H), (t_2^{\text{nom}} = 510, \sigma_2 = L).$

Случай несимметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 70$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 70 с;
- $70 < \mu < 85$: только ускорение лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;

Численные результаты. Пример 1

Например, при $\mu = 80$ с получено следующее оптимальное решение $t_1 = 500$, $t_2 = 430$.



Численные результаты. Пример 1

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = H), (t_2^{\text{nom}} = 510, \sigma_2 = L).$

Случай несимметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 70$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 70 с;
- $70 < \mu < 85$: только ускорение лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;
- $\mu = 85$ с: ускорение на 85 с и задержка на 170 с стоят одинаково для лёгкого ВС;

Численные результаты. Пример 1

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = H), (t_2^{\text{nom}} = 510, \sigma_2 = L).$

Случай несимметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 70$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 70 с;
- $70 < \mu < 85$: только ускорение лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;
- $\mu = 85$ с: ускорение на 85 с и задержка на 170 с стоят одинаково для лёгкого ВС;
- $\mu > 85$: ускорение лёгкого ВС становится дороже задержки и не рассматривается как решение.

Численные результаты. Пример 2

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 670, \sigma_2 = \text{L}).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 10$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — задержка лёгкого ВС на 10 с;

Численные результаты. Пример 2

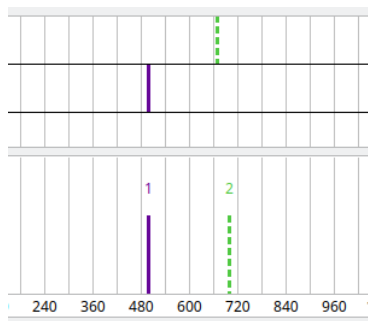
$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = H), (t_2^{\text{nom}} = 670, \sigma_2 = L).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 10$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — задержка лёгкого ВС на 10 с;
- $10 < \mu < 230$: оптимальное решение — задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;

Численные результаты. Пример 2

Например, при $\mu = 30$ с получено следующее оптимальное решение $t_1 = 500$, $t_2 = 700$.



Численные результаты. Пример 2

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 670, \sigma_2 = \text{L}).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 10$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — задержка лёгкого ВС на 10 с;
- $10 < \mu < 230$: оптимальное решение — задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;
- $230 \leq \mu \leq t^{\text{acc}} = 480$ с: оптимальное решение — ускорение или задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;

Численные результаты. Пример 2

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = H), (t_2^{\text{nom}} = 670, \sigma_2 = L).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 10$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — задержка лёгкого ВС на 10 с;
- $10 < \mu < 230$: оптимальное решение — задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;
- $230 \leq \mu \leq t^{\text{acc}} = 480$ с: оптимальное решение — ускорение или задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;
- $t^{\text{acc}} < \mu \leq t^{\text{dec}} = 1320$ с: только задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ .

Численные результаты. Пример 2

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = H), (t_2^{\text{nom}} = 670, \sigma_2 = L).$

В случае несимметричной функции штрафа ускорения не будут рассматриваться ввиду в два раза более дорого ускорения.

Численные результаты. Пример 3

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 600, \sigma_2 = \text{L}),$
 $(t_3^{\text{nom}} = 700, \sigma_3 = \text{M}).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 160$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 160 с;

Численные результаты. Пример 3

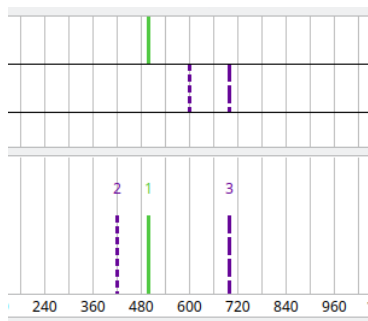
$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 600, \sigma_2 = \text{L}),$
 $(t_3^{\text{nom}} = 700, \sigma_3 = \text{M}).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 160$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 160 с;
- $160 < \mu < 280$: оптимальное решение — ускорение лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;

Численные результаты. Пример 3

Например, при $\mu = 180$ с получено следующее оптимальное решение $t_1 = 500$, $t_2 = 420$, $t_3 = 700$.



Численные результаты. Пример 3

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 600, \sigma_2 = \text{L}),$
 $(t_3^{\text{nom}} = 700, \sigma_3 = \text{M}).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 160$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 160 с;
- $160 < \mu < 280$: оптимальное решение — ускорение лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;
- $280 \leq \mu \leq t^{\text{acc}} = 480$ с: оптимальное решение — ускорение или задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ с изменением позиции судна;

Численные результаты. Пример 3

$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 600, \sigma_2 = \text{L}),$
 $(t_3^{\text{nom}} = 700, \sigma_3 = \text{M}).$

Случай симметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 160$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — ускорение лёгкого ВС на 160 с;
- $160 < \mu < 280$: оптимальное решение — ускорение лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ ;
- $280 \leq \mu \leq t^{\text{acc}} = 480$ с: оптимальное решение — ускорение или задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ с изменением позиции судна;
- $t^{\text{acc}} < \mu \leq t^{\text{dec}} = 1320$ с: только задержка на минимальную величину вариации μ с изменением позиции судна.

Численные результаты. Пример 3

$$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 600, \sigma_2 = \text{L}), \\ (t_3^{\text{nom}} = 700, \sigma_3 = \text{M}).$$

Случай несимметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 40$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — задержка лёгкого и среднего ВС с сохранением порядка;

Численные результаты. Пример 3

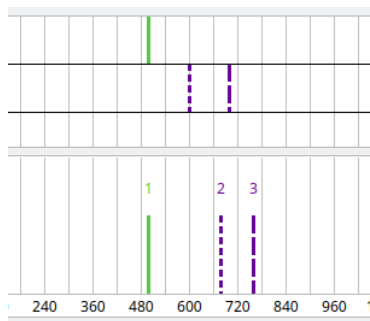
$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 600, \sigma_2 = \text{L}),$
 $(t_3^{\text{nom}} = 700, \sigma_3 = \text{M}).$

Случай несимметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 40$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — задержка лёгкого и среднего ВС с сохранением порядка;
- $40 < \mu \leq 66.(6)$: оптимальное решение — задержка лёгкого ВС и задержка среднего ВС на минимальную величину вариации μ ;

Численные результаты. Пример 3

Например, при $\mu = 60$ с получено следующее оптимальное решение $t_1 = 500$, $t_2 = 680$, $t_3 = 760$.



Численные результаты. Пример 3

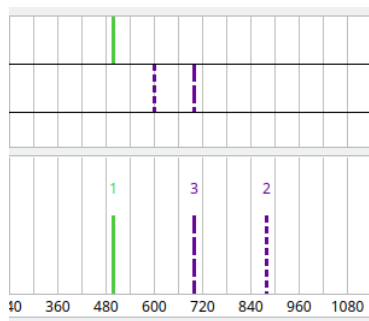
$$(t_1^{\text{nom}} = 500, \sigma_1 = \text{H}), (t_2^{\text{nom}} = 600, \sigma_2 = \text{L}),$$
$$(t_3^{\text{nom}} = 700, \sigma_3 = \text{M}).$$

Случай несимметричной функции штрафа:

- $0 \leq \mu \leq 40$: решение совпадает с решением в случае без ограничения на минимальную величину вариации — задержка лёгкого и среднего ВС с сохранением порядка;
- $40 < \mu \leq 66.(6)$: оптимальное решение — задержка лёгкого ВС и задержка среднего ВС на минимальную величину вариации μ ;
- $\mu > 66.(6)$: оптимальное решение — задержка лёгкого ВС на минимальную величину вариации μ с изменением позиции судна;

Численные результаты. Пример 3

Например, при $\mu = 90$ с получено следующее оптимальное решение $t_1 = 500$, $t_2 = 880$, $t_3 = 700$.



Наборы из 30 судов, слияние 2-х потоков, 1000 пусков:

- симметричная функция штрафа, равномерное распределение типов — $T_{avg} = 7.59$ с, $T_{max} = 99.5$ с;
- несимметричная функция штрафа, равномерное распределение типов — $T_{avg} = 5.35$ с, $T_{max} = 137.18$ с;
- симметричная функция штрафа, неравномерное распределение типов — $T_{avg} = 0.75$ с, $T_{max} = 7.18$ с;
- несимметричная функция штрафа, неравномерное распределение типов — $T_{avg} = 0.41$ с, $T_{max} = 3.03$ с;

Наборы из 50 судов, слияние 2-х потоков, 1000 пусков:

- симметричная функция штрафа, равномерное распределение типов — $T_{avg} = 110.08$ с, $T_{max} = 5264.66$ с ≈ 88 мин;
- несимметричная функция штрафа, равномерное распределение типов — $T_{avg} = 221.48$ с, $T_{max} = 9505.96$ с ≈ 159 мин;
- симметричная функция штрафа, неравномерное распределение типов — $T_{avg} = 1.79$ с, $T_{max} = 14.19$ с;
- несимметричная функция штрафа, неравномерное распределение типов — $T_{avg} = 1.04$ с, $T_{max} = 4.6$ с;

Для равномерного распределения время обработки некоторых примеров достигало нескольких часов. Счёт был остановлен принудительно.

За прошедший отчётный период проделана следующая работа:

- 1 На основе методов смешанного целочисленного программирования разработана процедура слияния потоков воздушных судов с учётом их типов. Алгоритм назначает оптимальный порядок судов и их новые моменты.
- 2 С помощью разработанной процедуры произведено моделирование, оценены полученные результаты. Также произведено сравнение результатов с результатами процедуры перебора порядков судов с отсечениями, которая была разработана на предыдущих этапах работы.

- 3 Представленная процедура слияния потоков судов с учётом их типов доработана для назначения вариации моментов прибытия не меньше заранее заданной величины.
- 4 С помощью доработанной процедуры произведено моделирование, оценены полученные результаты.

Идеи обработки ансамбля ВС

Основная идея — разбиение исходной группы на подгруппы меньшего размера (кластеризация), оптимизировать которые можно независимо. Выделение таких подгрупп осуществляется построением расписания для судов в их исходном порядке, а затем обнаружением последовательностей судов, разделенных промежутком, большим определенного порога. Априорная разумная величина такого промежутка — 5 минут.

Вторая идея — ограничение изменения позиции ВС в исходном порядке не дальше заданной величины. Было принято ограничение такого ухода в 4 позиции.

Идеи обработки ансамбля ВС

Третья идея — использование разных промежутков варьирования для разных ВС. В численных экспериментах с одинаковым максимальным промежутком варьирования момента прибытия (8 мин ускорения, 22 мин замедления) величина этого промежутка такова, что весьма слабо сокращает перебор. Но в ситуации с судами, имеющими различные промежутки варьирования, эта идея может дать выигрыш в производительности.

В качестве основного критерия отсекающей перебора была выбрана «плотность» последовательности. Для набора $S = \{(t_i, \sigma_i)\}_{i=1}^N$ плотность определяется как

$$\rho(S) = \rho(\{(t_i, \sigma_i)\}) = \sum_{i=1}^{N-1} \tau_{\sigma_i, \sigma_{i+1}}^{\text{safe}},$$

то есть как сумма минимальных безопасных интервалов между парами соседних судов в выбранном порядке.

При обработке какой-либо последовательности S новая сгенерированная последовательность S' проходила дальнейшую обработку только, если она была более «плотной», чем исходная: $\rho(S') < \rho(S)$.

На основе критерия плотности были предпросчитаны шаблоны перестановок, которые подразумевают нахождение и выделение двух подряд идущих групп судов определённых типов и изменение положений этих групп относительно друг друга. Учитывалось ограничение на дальность перестановки судов.

Для выбранных последовательностей судов решалась задача линейного программирования. В конце работы алгоритма выбиралась перестановка с наименьшим значением минимизируемого функционала.

Счётная процедура

Для перебора всевозможных последовательностей использовалась графовая реализация. Вершина графа — это последовательность судов. Между вершинами есть ребро, если из одной перестановки можно получить другую.

В качестве алгоритма перебора вершин графа использовалась параллельная процедура поиска в ширину.

Однако, данный алгоритм показал неудовлетворительные результаты по скорости обработки ансамблей с равномерным распределением типов судов в наборе.